LIBRARY AND INFORMATION CENTER
MAHIDOL UNIVERSITY
20 MAR 1992

GENERALIZED VECTOR MATRICES, HYPERCOMPLEX NUMBERS, AND DUAL NUMBERS : THEORY AND ITS APPLICATIONS TO SOME MATHEMATICAL PROBLEMS IN MECHANICS, ROBOTICS, AND OPTICS

วิทยานิพนธ์นี้
ของ
.....

VIMOLRAT NGAMARAMVARANGGUL

A THESIS SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF
THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE
(APPLIED MATHEMATICS)

IN

FACULTY OF GRADUATE STUDIES
MAHIDOL UNIVERSITY
1991

Copyright by Mahidol University

18369

ชื่อวิทยานิพนธ์ เมทริกซ์เชิงเวกเตอร์ในนัยทั่วไป จำนวนเชิงซ้อนมิติเกิน และ จำนวนทวิภาค : ทฤษฎีและการประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในกลศาสตร์ วิทยาการหุ่นยนต์ และทัศนศาสตร์

ผู้วิจัย วิมลรัตน์ งามอร่ามวรางกูร

ปริญญา วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์)

คณะกรรมการควบคุมวิทยานิพนธ์

ปรีดีพร ลิ้มเจริญ Ph.D.

วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ์ Ph.D.

วันที่สำเร็จการศึกษา 28 สิงหาคม พ.ศ.2534

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์หลักของวิทยานิพนธ์นี้ คือ เพื่อศึกษาสมบัติเชิงพีชคณิต และ เรขาคณิต ของเมทริกซ์เชิงเวกเตอร์ในนัยทั่วไป (ซึ่งรวมทั้งส่วน สเกลาร์ และ เวกเตอร์ ไว้ในธาตุมูล) จำนวนเชิงซ้อนมิติเกิน และ จำนวนทวิภาค และเพื่อวิเคราะห์หาแนวทางประยุกต์สิ่งเหล่านี้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในสาขาวิทยาศาสตร์กายภาพ และ วิศวกรรมศาสตร์ ในเบื้องต้น ได้กล่าวถึงการพัฒนาระบบจำนวนแบบต่างๆ นับตั้งแต่ระบบจำนวนนับ จำนวนตรรกยะ จำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน และจำนวนเชิงซ้อนมิติเกิน ไปจนถึงจำนวนลักษณภาพเกินโดยทั่วไป นอกจากนี้ ยังกล่าวโดยย่อถึงการพัฒนา จำนวนพี-แอดิก จำนวนนอกมาตรฐาน (จำนวนจริงเกิน) และ จำนวนอติสัจยะ (จำนวนของคอนเวย์) การพิจารณาอัตลักษณ์ในทางพีชคณิต สำหรับโครงสร้างเชิงซ้อนมิติเกิน ของ จำนวนจตุรภาพ (ควอเทอร์เนียน) จำนวนอัฐภาพ (ออคโทเนียน) (หรือที่เรียกว่าจำนวนของเคลี่ย์) จำนวนทวิจตุรภาพ (ไบควอเทอร์เนียน) (ชนิดของแฮมิลตันและของคลิฟฟอร์ด) และ จำนวนทวิภาค เป็นต้น นั้น ได้นำมุ่งเข้าสู่การศึกษาเมทริกซ์เชิงเวกเตอร์ของ ซอร์น และต่อไปยังการขยายนัยทั่วไปของเมทริกซ์เชิงเวกเตอร์นี้ โดย อนาไจรอส จี. เฟลลูรีส โดย เหียว ชูล มวง และโดย ซูซุมุ โอคูโบ นอกจากนี้ ยังได้กล่าวถึงความเกี่ยวพันของโครงสร้างเหล่านี้กับพีชคณิตของ ลี และ ของ

Copyright by Mahidol University

ยอร์ดาน อันเป็นที่คุ้นเคยกันอย่างดีแล้ว โครงสร้างเชิงพีชคณิตของฟิสิกส์ที่สัมพันธ์กัน ก็ได้รับการพิจารณาด้วยในบางกรณี ได้แก่ พีชคณิตของ ปัวส์ซง และกลุ่มของ ไฮเซนแบร์ก รวมทั้งกลุ่มเชิงเมทริกซ์ที่มีความสำคัญในกลศาสตร์ตามแบบแผน และ เชิงควอนตัม เมทริกซ์ของ โจนส์ กับ มิลเลอร์ ในทัศนศาสตร์ทางด้าน พีชคณิต และ แคลคูลัส ของการเกิดขั้ว อีกทั้ง สปินเนอร์ กับ ทวิสเตอร์ ในทฤษฎีสัมพัทธภาพ และ ทฤษฎีควอนตัมเชิงสัมพัทธภาพ ด้วย ในการศึกษาจำนวนลักษณภาพเกินที่ขยายนัยทั่วไป (ของ ชาร์ลส์ มิวซิส) ซึ่งอาจรวมถึงกรณีต่างๆที่มีหน่วยหลัก ตัวหารศูนย์ ตัวบรรลุศูนย์ ตัวบรรลุอัตภาพ อย่างหลากหลาย นั้น ต้องการพื้นความรู้ทางพีชคณิตที่กว้างขึ้น จึงต้องศึกษาพีชคณิตแบบนอกการเปลี่ยนกลุ่ม และโครงสร้างเชิงพีชคณิตแบบอื่นๆ ซึ่งรวมสมบัติต่างๆ เหล่านี้เข้าด้วยกัน แล้วแต่กรณี ได้แก่ การให้เกิดการเปลี่ยนกลุ่มของกำลัง หรือ การสลับ หรือ ภาวะอ่อนโยน การยอมรับโครงสร้างของ ลี หรือ ยอร์ดาน หรือ มาลเซฟ การให้บรรลุศูนย์ได้ และ การจัดลำดับขั้น ในปัจจุบันได้มีการนำสิ่งต่างๆ เหล่านี้ บางกรณีมาใช้ ใน ฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ และ ฟิสิกส์ทางทฤษฎี ตัวอย่างเช่น โครงสร้างของ ลี ที่มีการจัดลำดับขั้น ซึ่งมักรู้จักกันในนามของ อภิพีชคณิต และ กลุ่มอภิลักษณ์

สำหรับตัวอย่างที่น่าสนใจในการประยุกต์เพื่อแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในกลศาสตร์ และ วิทยาการหุ่นยนต์ ที่ได้นำมาพิจารณา ก็ได้แก่ การนำจำนวนเชิงซ้อนมิติเกิน และ จำนวนทวิภาค มาใช้ในกลศาสตร์ของ ไจโรสโกป และในเรื่อง จลนศาสตร์ของแขนของหุ่นยนต์ ในด้านทัศนศาสตร์นั้น ได้เสนอการใช้เมทริกซ์เชิงเวกเตอร์ ในนัยทั่วไป ในการพัฒนาทฤษฎีเกี่ยวกับการเกิดขั้วบางส่วนของแสง ในกรณีที่มีการแปรปรวนของ วิถี และ ระดับขั้น ของการเกิดขั้ว นอกจากนี้ ได้นำเสนอวิธีการทางด้าน แผนภูมิรูปภาพทางคอมพิวเตอร์ เพื่อช่วยให้สามารถทำ "การคะนิงภาพ" ของเมทริกซ์เชิงเวกเตอร์ในนัยทั่วไป ได้ง่ายยิ่งขึ้น

Copyright by Mahidol University

Thesis Title	Generalized Vector Matrices, Hypercomplex Numbers, and Dual Numbers : Theory and Its Applications to Some Mathematical Problems in Mechanics, Robotics, and Optics.
Name	Vimolrat Ngamaramvaranggul
Degree	Master of Science (Applied Mathematics)
Thesis Supervisory Committee	
	Preedeeporn Limcharoen, Ph.D.
	Wudhibhan Prachyabrued, Ph.D.
Date of Graduation	28 August B.E.2534 (1991)

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to study the algebraic and geometrical properties of the generalized vector matrices (that include elements of both scalars and vectors), hypercomplex numbers, and dual numbers, and to investigate their applications to the solution of some mathematical problems in physical sciences and engineering. The development of "number systems" is first described, from natural numbers, through rational, real, complex, and hypercomplex numbers, to general *hypernumbers*. A brief survey of the p-adic, nonstandard (hyperreal), and surreal (Conway) numbers, is also given. The algebraic characterizations of the *hypercomplex* structures of the quaternions, octonions (or Cayley numbers), biquaternions (of Hamilton and of Clifford), dual numbers, etc., lead naturally to the study of the Zorn vector matrices, and their recent generalizations by Anargyros G. Fellouris, Hyo Chul Myung, and Susumu Okubo. The connections of these structures

Copyright by Mahidol University

with the familiar Lie and Jordan algebras are indicated. Some related algebraic structures of physics are discussed, including the Poisson algebras and the Heisenberg and important matrix groups in classical and quantum mechanics, the Jones and Mueller matrices of the algebra and calculus of polarization in optics, and the spinors and twistors in relativity and relativistic quantum theory. To provide an adequate basis for the study of the general *hypernumbers* (of Charles Muses), that may include a wide variety of units, zero-divisors, nilpotents and idempotents, a broader view of algebra is needed. This involves the study of more general nonassociative algebras, and other algebraic structures, with various combinations of such properties as power-associativity, alternativity, flexibility, Lie- or Jordan- or Malcev-admissibility, nilpotence, and grading. Some of these have recently been introduced into mathematical and theoretical physics, for example, the *graded* Lie structures that are now referred to as *superalgebras* and *supergroups*.

As examples of their applications to some interesting mathematical problems in mechanics and robotics, *hypercomplex* and *dual* numbers have been used in the dynamics of gyroscopes, and in the kinematics of spatial mechanisms and robot-arm manipulators. In optics, a suggestion is made for the use of generalized vector matrices in developing a theory of *partial* polarization of light with fluctuating mode and degree of polarization. A pictographical computer method has been introduced to provide an easy "visualization" of the generalized vector matrices.

Copyright by Mahidol University